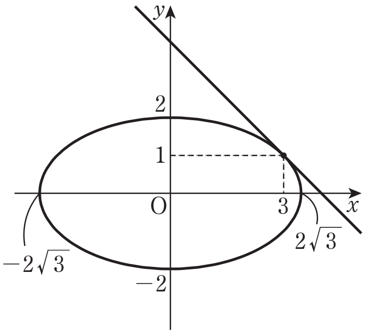
PART2 いろいろな曲線の接線の方程式

要点整理と公式

要点 ① 曲線の方程式と接線

楕円 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 $(3,\ 1)$ における接線の方程式は

$$\frac{3x}{12}+\frac{1\cdot y}{4}=1 \quad すなわち \quad y=-x+4$$



である。この接線の方程式を，微分を用いて求める。

$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ について，$\dfrac{dy}{dx}$，すなわち y' を求める。

合成関数の微分により

$$\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{d}y^2\cdot\frac{d}{dx}=2y\cdot\frac{dy}{dx}=2y\cdot y'$$

であるから，$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の両辺を　　　　　　　すると

$$\frac{\quad}{12}+\frac{\quad}{4} \qquad = \qquad \frac{y}{2}\cdot y'=-\frac{x}{6}$$

$y\neq 0$ のとき　$y'=-\dfrac{x}{3y}$

よって，点 $(3,\ 1)$ における接線の傾きは $-\dfrac{3}{3\cdot 1}=-1$

したがって，求める接線の方程式は

$$y=-1\cdot(x-3)+1 \quad すなわち \quad y=-x+4$$

要点 ② 媒介変数で表された曲線と接線

座標平面上の曲線が，媒介変数 t により

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

の形で表されているとする。このとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数で表す。

合成関数の微分により　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d}\cdot\dfrac{d}{dx}$　……　①

逆関数の微分により　$\dfrac{d}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{d}}$　……　②

①，②より　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

よって，次のことが成り立つ。

曲線の媒介変数表示と導関数

$x=f(t)$，$y=g(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

(ex) 曲線 $\begin{cases}x=\cos 2t\\ y=\sin t\end{cases}$ において，$t=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の方程式

$\dfrac{dx}{d}=$　　　　，$\dfrac{dy}{d}=$　　　より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{-2\sin 2t}=-\frac{\cos t}{2\sin 2t}$$

よって，$t=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos\dfrac{\pi}{6}}{2\sin\dfrac{\pi}{3}}=-\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}$$

また，接点の座標は $\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ より $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

したがって，求める接線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\qquad \text{すなわち}\qquad y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$$

2 (1) 双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=-1$ 上の点 $(-2,\ 3)$ における接線の方程式および法線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sqrt{3}\sin t \end{cases}$ において，$t=-\dfrac{\pi}{4}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

Point Pickup

$F(x,\ y)=0$ で表される曲線の接線

合成関数の微分を用いて両辺を x で微分することにより，$\dfrac{dy}{dx}$ を $x,\ y$ を用いて表し，与えられた点の座標の値を代入することで，接線の傾きを求める。

媒介変数で表される曲線の接線

$x=f(t),\ y=g(t)$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

であることを用いて，接線の傾きを求める。

第10講　PART2 確認問題

1　双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の点 (2, 3) における接線および法線の方程式を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

接線　$y=$ [ア]

法線　$y=$ [イ]

① $x+1$　　② $2x-1$

③ $\dfrac{1}{2}x+2$　　④ $-\dfrac{1}{2}x+4$

2　曲線 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$ において，$t=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

$y=$ [ウ]

① $\sqrt{3}\,x-1$　　② $-\sqrt{3}\,x+5$

③ $2\sqrt{3}\,x-2$　　④ $-2\sqrt{3}\,x+8$

PART2 いろいろな曲線の接線の方程式

2 (1) 双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=-1$ 上の点 $(-2,\ 3)$ における接線の方程式および法線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sqrt{3}\sin t \end{cases}$ において，$t=-\dfrac{\pi}{4}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

[解答]

(1) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=-1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{2}-\frac{2y}{3}\cdot y'=0 \qquad y\neq 0 \text{ のとき } y'=\frac{3x}{2y}$$

よって，点 $(-2,\ 3)$ における接線の傾きは $\dfrac{3\cdot(-2)}{2\cdot 3}=-1$

したがって，求める接線の方程式は

$y=-(x+2)+3$　すなわち　$y=-x+1$

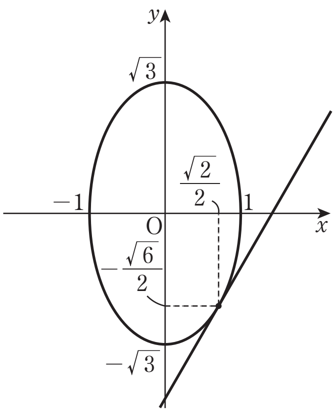
また，$(-2,\ 3)$ における法線の傾きは 1

したがって，求める法線の方程式は

$y=1\cdot(x+2)+3$　すなわち　$y=x+5$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=\sqrt{3}\cos t$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sqrt{3}\cos t}{-\sin t}=-\frac{\sqrt{3}\cos t}{\sin t}$$



よって，$t=-\dfrac{\pi}{4}$ に対応する点における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}$$

また，接点の座標は $\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\ \sqrt{3}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ より $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

したがって，求める接線の方程式は

$$y=\sqrt{3}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad \text{すなわち} \qquad y=\sqrt{3}\,x-\sqrt{6}$$

第10講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②，イ：④

[解説]

$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ の両辺を x で微分すると，

$$2x-\frac{2y}{3}\cdot y'=0 \quad \text{[A]}$$

$y \neq 0$ のとき，$y'=\dfrac{3x}{y}$

よって，点 (2，3) における接線の傾きは，

$$\frac{3\cdot 2}{3}=2 \quad \text{[B]}$$

したがって，求める接線の方程式は，

$$y-3=2(x-2)$$

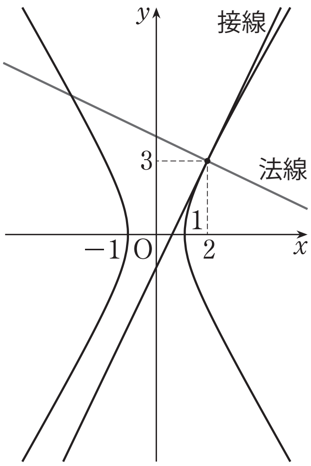
$$\boldsymbol{y=2x-1}$$

また，点 (2，3) における法線の傾きは $-\dfrac{1}{2}$

したがって，求める法線の方程式は，

$$y-3=-\frac{1}{2}(x-2)$$

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+4}$$



[A]　y^2 を x で微分すると，

$$\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dy}y^2\cdot\frac{dy}{dx}=2y\cdot\frac{dy}{dx}=2y\cdot y'$$

となる。

[B]　y' の式に $x=2$，$y=3$ を代入する。

2 ［正解］ウ：④

［解説］

$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=4\cos t$ より，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4\cos t}{-2\sin t} \quad \text{[C]}$$

$$=-\frac{2\cos t}{\sin t}$$

［C］　$x=f(t)$，$y=g(t)$ のとき，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

よって，$t=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の傾きは，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=-\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \quad \text{[D]}$$

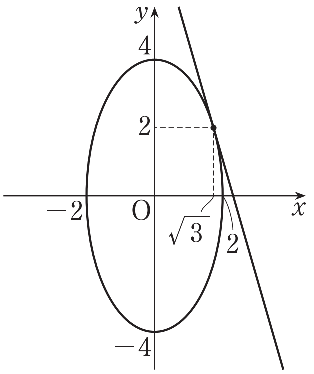
$$=-2\sqrt{3}$$

［D］　$\dfrac{dy}{dx}$ の式に $t=\dfrac{\pi}{6}$ を代入する。

また，接点の座標は，$\left(2\cos\dfrac{\pi}{6},\ 4\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ より，

$$(\sqrt{3},\ 2)$$

したがって，求める接線の方程式は，

$$y-2=-2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$$

$$\boldsymbol{y=-2\sqrt{3}x+8}$$